Title	Topologische Invariant トシテノーツノ metrischer Raum
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 30 p.11-p.21
Issue Date	1935-02-19
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74015
rights	
Note	

93. Topologische Invariant トシテノ一ツノ metrischer Raum.

小松醇郎(阪大)

〔I〕 一ツノ n次元 Komplex K ($n \geqq 2$) ニ對シ二種類ノ diskrete ナ Gruppe ヲ定義シ、ソノ Gruppenelemente ノ間ニ Entfernungsfunktion ヲ規定シテ metrischer Raum トシマス。此ノ Raum ガ Metrik モ入レテ kongruent ナノガ topologische Invariant トナリマス。

此ノ Gruppe ヲ使ッテ如何ナル結果ガ出ルカ、未ダ餘リ良ク調ベテモ見ナイノデスガ今迄ノ所、次ノ様ナ新シイ結果ヲ得テ居マス。

1) 三次元集合體デ fundamentalgruppe ガ等シクテモ尚且ツ homöomorph デナイヤウナ geschlossen ノモノヲ判別スル二ツノ criterion ヲ與ヘル。

2) H. Kneser ノ Irreduzibel ナ Mannigfaltigkeit ハ此ノ第一種ノ Gruppe ガ Einheitsgruppe ニナルモノデアル。

3). 三次元 Mannigfaltigkeit ガ asymmetrisch デアルタメノ必要且ツ充分條件ヲ此ノ第二種ノ gruppe ノ metrischer Raum ニヨツテ求メル。

以下此ノ Gruppe ノ Definition 及ビ上記結果ノ誘導ヲ述ベテ見マス。

〔II〕 Flächengruppe erster Art.

Komplex K ノ中デ球面ノ eindeutig ナ stetiges Bild ヲナス geschlossen ノ曲面ヲ考ヘ、之ガ stetige Deformation (homotop) デ一点ニナル (homotop 0) モノハ此ノ Gruppe ノ Einheits element ニスル、曲面ニ Orientierung ヲ附シソノ Gruppenelement a トスレバ a^{-1} ナル Element ヲ表ハス曲面ハ逆ノ Orientierung ヲ附シタモノニシマス、aa^{-1} ナル曲面ハ a ト a^{+1} トハ stetige Deformation デ移レマスカラ Einheitselement.

又 Orientierung ヲツケタニツノ曲面ノ結合 ab ハ又一ツノ球面ノ stetige Bild ト考ヘラレルカラ一ツノ Gruppenelement ヲ表ス。勿論コノタメニハ曲面 (genus 0 ノ) ヲ凡テ或ル fixed シタ一点ヲ通ラセル事ガ必要デス、ツマリ ab ヲ Zusammenhängend ニスルコトガ必要デス、之ハ常ニ可能。

是デ一ツノ Gruppe ガ出來マス、Komplex ヲ Unterteilen シテモ此ノ Gruppe ハ Invariant トナリマ

スカラ之ハ一ツノ Topologische Invariant.

是ガ一般ニハ abelian デナイコトハ次ノ zweiter Art ノ群ト同様。

Kneser ノ Irreduzibel ノ Begriff ハ此ノ Gruppe ガ Einheits-Gruppe デアルコトト äquivalent デアリマス。

ソレハ球面ガ Raumelement（三次元 Simplex ノ stetiges Bild）ノ Rand トナツテ居ルナラバ球面 homotop 0 ハ明ラカデスシ逆ニ homotop 0 ダトスルト球面ハ Deformation ノ途中ノ経路ノ空間部分ノ Rand デスシ、ソノ空間部分ハ任意ノ閉曲線ガ homotop 0 デスカラ1ツノ Raumelement デアリマス、故ニ任意ノ球面ガ Raumelement ノ Rand トナツテ居ルト言フ Irreduzibel ノ條件ハ Flächengruppe erster Art ガ Einheitselement ノミト云フ條件ニナリマス。

此ノ Gruppe ニハ Metrik ヲ入レルコトハ一寸無駄ダト思ヒマス。

(例) Irreduzibel ノ Mannigfaltigkeit ハ決シテ珍ラシイモノデハナク三次元球面ノ fixpunktfrei ノ運動群ニヨリテ互ニ移サレタ点ヲ等シイ点ト考ヘテ生ズル集合体ハ皆 Irreduzibel デス。

斯様ニ fundamentalgruppe ガ endliche Ordnung ノ Mannigfaltigkeit ノミデナクミニツノ円周(Kreis)ノ Topologische Produkt モ亦 Irreduzibel デス

〔III〕 Flächengruppe Zweiter Art.

例ヘバユークリッド空間ノ中ノ Torus デ囲マレタ部分ヲトレバ Torusfläche ハ一ツノ閉曲線ニハ stetige Deformation デ移レルガ一点ニハ移レナイ、之ヲ homotop 1 トスル。

曲面 F ノ Geschlecht p $(p \geqq 1)$ ハ homotop 0 ニハ決シテナラナイコトハ次ノ如ク分ル。

(証). F homotop 0 ダトスルト stetige Deformation デ移レル曲面ノ Schar F_t ガ存在シ

$F_1 = F$, $F_0 =$ Ein Punkt トナル。此ノ F_t デ作ツタ空間部分ノ Rand ガ F トナル、ソシテ少クトモ p 個ノ曲線ハ homolog 0 ニナラナイ(Seifert ノ定理)筈、況ンヤ homotop 0 ニナラナイ筈デアルノニ仮定ニヨレバ一点ニ縮マルノダカラ、皆 homotop 0. 以上

ソコデ Zweiter Art ノ Gruppe ハ次ノ如ク define スル、閉曲面ノ stetige Bild ニ Orientierung ヲ附シタモノヲ一ツノ Gruppenelement トシ modulo homotop 1 デ移ル様ナニツノ曲面ハ等シイ Element トスル、homotop 1 ナ曲面ハ Einheitselement ト

スル、勿論コノ場合モ曲面ハ凡テ一点ヲ通ラセテZusammenhängend ニシテオク．前ト同様ニab ノ結合ハaガ Geschlecht p_1 ノ曲面ノ Stetiges Bild，bガ p_2 ノ曲面ノ stetiges Bild トスレバ ab ハ少クトモ p_1+p_2 ノ Geschlecht ノ曲面ノ Stetiges Bild ト考ヘラレルカラ又一ツノ Gruppenelement.

此ノ Gruppe モ亦 Topologische Invariant デアルコトハ明カデス、尚ホ又 Wegegruppe ノ様ニ kombinatorisch ナ方法デ嚴格ニ規定スルコトガ出來ルハ勿論デセウ。

此ノ場合原点ニ結ブタメニ一ツノ Weg ヲ以テシ曲面部分ノ縮マツタモノト考ヘテモヨイシ又一ツノ二次元 Simplex 凡テニ對シ原点ヲ通ル一ツノ閉曲面ヲ夫々固定サセテ置イテモ出來マウ。(Seifert 參照)

homotop 1 ハ homotop 0 ヲ含ムト考ヘラレルカラ今度ノ Gruppe ハ前ノ erster Art ノ Gruppe ヲ Untergruppe トシテ持ツ。

此ノ Untergruppe ガ Normalteiler デアラウト思フケレドモ一寸証明ガ思ヒ付キマセン。

此ノ Gruppe 全体ハ Abelian デハナイ、Homologiegruppe トノ関係ノ後章參照.

[IV] Metrischer Raum:

此ノ Gruppe ニ Metrik ヲ次ノ如ク入レル。

Gruppenelement a ニ對應スル曲面ガ Geschlecht p ノ閉曲面ノ eindeutig stetiges Bild ト考ヘラレ且ツ Geschlecht ガ p 以下ノ閉曲面ノ stetiges Bild トナリ得ナイトキ此ノ Gruppenelement ノ Norm ヲ $p+1$ トス。 $N(a)=p+1$.
勿論 a ヲ表ハス多クノ閉曲面（homotop ノデ互ヒニ移ル）ノウチデ上記 Geschlecht 最小ナルモノヲトル。

常ニ $p=0$，即チ Norm ガ常ニ 1 ニナッテ仕舞フトハ限ラナイ、例ヘバ円周三ツノ topologisches Produkt ハ Norm 2 ナル三ツノ generator カラ出來ル freies Produkt.

此ノ Norm ノ Definition ニヨルト

i) $N(1)=0$ 　 $1=$ Einheitselement

ii) $N(a)>0$ 　 $a\neq 1$

iii) $N(a^{-1})=N(a)$

iv) $N(ba)=N(ab)<N(a)+N(b)$

ソレ故此ノ Gruppenraum ニテ二点 (a, b) ノ distance トシテ

$$\rho(a,b)=N(ab^{-1})$$

ト定義スル。

然ラバ二ツノ Mannigfaltigkeit ガ homöomorph デアルタメニハ Gruppe トシテ isomorph デアルバカリデナク Metrik モ亦一致シナクテハナラナイ、即此ノ

Metrischer Raum ガ topologische Invariant デス。

尚ホ此ノ Metrisierung ノ性質トシテ Hopf ノ Abbildungsgrad ノ Theorie ヲ用エルト次ノ関係ガ分ル。

v) $N(a) \leq 3$ ナラバ $N(a^2) = N(a)$

斯様ナ Norm ヲ持ツ Gruppe ノ性質ヲモット細ク調ベネバナラナイガ未ダ試ミテ見マセヌ。

〔V〕三次元可符号閉集合体デ fundamentalgruppe 等シクテ尚ホ且ツ homöomorph デナイモノノ例.

○度々繋ガタミツノ円周ノ Topologisches Produkt.

○Geschlecht 3 ノ Heegaard Diagramm ニテ曲面ノ對應

$$\begin{cases} r_i = t_i & (i = 1, 2, 3) \\ u_i = s_i \end{cases}$$

r_i, t_i 共ニ homotop 0 in Vollbrezeln.

両者共ニ fundamentalgruppe ハ Erzengende 3 デ zyklische Gruppe ノ freies Produkt、endliche Ordnung ノ Element ナシ。(Seifert: Topologie S. 156)

故ニ二次元 Homologiegruppe モ Duality ノ定理ニヨリ一致ス。

是ガ homöomorph デナイコトハ前者ハ Flächengruppe erster Art ガ Einheitselement ノミ，後者ハ三

ツノ Erzeugende ガアル、即チ erste Art ノ Flächengruppe ノミデ既ニ homöomorph デナイコトガ分ル。

〔VI〕 Homologiegruppe トノ関係

二次元 homologiegruppe ハ Flächengruppe Zweiter Art ノ Untergruppe デアルハ明カ。ソコデ此ノ Zweiter Art ノ Gruppe ノ Element ノ Kommutatorelement ヲ考ヘルト之ハ皆 Homologiegruppe ノ Einheintselement ニナル、Rand ヲナス曲面デアル。ソコデ逆ニ nullhomolog ナ曲面ガ Kommutotorgruppe ニ這入ルコトヲ示セバ Abelschmachen シテ Homologiegruppe ニナルヲ知ル。

$$\mathfrak{U}^3=\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_i E_i^3$$

ガ Randfläche F ノ空間部分トスル、各 Simplex E_i^3 ニ對シソノ Orientierung ヲ持ツ表面ヲ原点 O ト結ブ各閉曲面 f_i ヲ考ヘル。f_i ハ皆 nullhomotop. 故ニ F ハ

$$F'=F\left(f_1^{\lambda_1}f_1^{\lambda_2}\cdots\cdots f_\alpha^{\lambda_\alpha}\right)^{-1}$$

ニ Deformation 可能. $f_1^{\lambda_1}f_2^{\lambda_2}\cdots\cdots f_\alpha^{\lambda_\alpha}$ ハ然シ又 $\mathfrak{U}^3$ ノ Randfläche. 故ニ Kette トシテ F ト等シイ、即チ F' ハ Kette トシテ 0. 從ッテ F' ハ各々二次元 Simplex ヲ Orientierung 逆ニ二回通ル、ソコデ

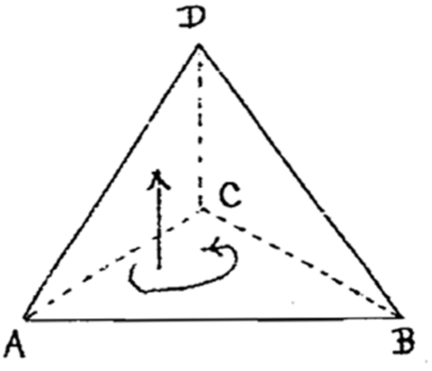
F' ノ曲面ヲ Flächengruppe zweiter Art デ表ハセバ各 Element ハ (+)n回ナラズ(−)n回含マレテ表ハレル、即チ F', 從ッテ又 F ハ Kommutatorgruppe ニ含マレル。

Nullhomolog デハアルガ Einshomotop デナイ曲面ヲ持ツ集合体ヲ作ルコトガ出來ルカラ Flächengruppe zweiter Art ハ一般ニハ Abelian デハナイ。

[VII] Asymmetrische ナ Mannigfaltigkeit ノ條件.

可符号集合体ヲ Orientierung ヲナシ之レガ逆ニ Orientierung シタモノト Orientierung ガ一致スル様ニ eineindeutig u. stetig ノ對應ガツケラレルトキ Symmetrisch, 然ラザルトキ Asymmetrisch ト云フ。

今 Flächengruppe zweiter Art ノ各曲面ヲソノ切スル空间トノ Orientierung ノ關係ヲ規定シテオク、



例ヘバ、Simplex ノ正ノ符号図ノ如キモノトスレバソノ Rand ノ正ノ符号ハ ABC ノ順デ與ヘラレルモノトス。

即チ Erzeugende $a_1, \cdots\cdots, a_r$ ヲ表ハス曲面 $f_1, \cdots\cdots$

-----, f_r ニ對シソレヲ凡テ一ツノ Simplex a^3 ノ一ツノ Randsimplex a^2 ヲ通ラセル. Mannigfaltigkeit Orientierte ナラ從ツテ a^3, 從ツテ上記規定ノ下ニ a^2 Orientierte, 之ニ對シ a_i ヲ表ハス f_i ノ Orientierung ノ関係ヲ a^2 ト一致スレバ十, 反スレバートスレバ

$$f_i = \varepsilon_i n_i \qquad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

ガ對應スル、サテ逆ニ Orientierte Mannigfaltigkeit ニテハ a^3 從ツテ a^2 ノ Orientierung 逆。故ニ $\varepsilon_i n_i$ ヲ変ヘナイ様ニスルニハ今度ノ Flächengruppe デハ f_i 從ツテ a_i^{-1} ナル Erzengende ヲトルコトニナル。

サテ Orientierung ヲ入レテ homöomorph ニナツタトスレバ

$|a^3|$ ヲ $|a^3|$ ニ對應セシメタト考ヘ得ラレルカラ

a_i	$\xi_i = a_i^{-1}$	Erzengende
$n_i\varepsilon_i$	$n_i\varepsilon_i$	a^2 トノ関係

ナルニツノ Flächengruppe ガ isomorph u. isometrisch、此処ニ

$a_i a_j$ ナル曲面ニハ $n_i\varepsilon_i + n_j\varepsilon_j$ ガ對應スル。

Element ノ integer ヘノ homomorph ノ Abbildung ニナル。

故ニ此ノ Orientierbar ノ Mannigfaltigkeit symmetrisch ナラバ $a_1, \cdots\cdots, a_r$ ヲ Erzengende トシテ Metrik ヲ持ツ Gruppenraum ト $\xi_i = a_i^{-1}$ ヲ Erzengende トシテ Metrik ヲ持ツ Gruppenraum トガ isomorph u. isometrisch 即チ Kongruent デアルノミナラズ同時ニ決レル integer ヘノ homomorphe Abbildung ガ一致シナクテハナラナイ。

ソレ故斯様ナ Kongruent ガ成立シナイ様ナ Flächengruppe ヲ持ツ Mannigfaltigkeit ハ Asymmetrisch デアル。

此ノ逆即チ Asymmetrisch デアルタメノ必要條件モ此ノ関係カラ言ヘルダラウト考ヘテモ見タガ早計ラシイ。元來コノ Flächengruppe ガ isomorph u. isometrisch トハ如何ナル條件デアルカ、何カ簡單ナ関係デ表ハセナイモノデアルカ、又或一ツノ決レル Charakter（上記 integer ヘノ homomorphe Abbildung）ハ一体如何ナル性質ノモノデアルカ、是等ハ先ヅ第一ニ調ベラレルベキ問題ト思フ。

又 fundamentalegruppe トノ関係モ此ノ方面ノ Fragenkreis ニ何等カノ解明ヲ與ヘルモノガアルト思フ。